Aplicações das Integrais Duplas

Professor: Gustavo Adolfo

Resumo

Massa

Lâmina Plana Delgada: $D \subset \mathbb{R}^2, D$ compacto
Densidade Superficial de Massa: $\delta: D \to \mathbb{R}^2$

$\delta(x_i^*, y_j^*) = 0$, se $(x_i^*, y_j^*) \notin D$

$$M \cong \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta(x_i^*, y_j^*) \cdot \Delta A$$

Define-se então, no limite de $n \to \infty$:

$$\iint_D \delta(x, y) dxdy$$

Obs.: Se a placa for homogênea:

$$\iint_D \delta dxdy = \delta \iint_D dxdy = \delta A$$

Centro de Massa

Seja $P_i(x_i, y_i), i = 1, \cdots, n$, sistema finito de partículas. E $m_i, i = 1, \cdots, n$, respectivas massas das partículas.

Os momentos de massa em cada eixo são definidos por:

$$M_x \cong \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

$$M_y \cong \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

O centro de massa do sistema é o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, que se comporta como se a massa total

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Do sistema estivesse concentrada nesse ponto. Definido pela razão entre os momentos de massa e a massa total:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$
$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

No contínuo, se usarmos a definição de densidade podemos calcular o centro de massa por:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \cdot \delta(x,y)dxdy}{\iint_D \delta(x,y)dxdy}$$
$$\bar{y} = \frac{\iint_D y \cdot \delta(x,y)dxdy}{\iint_D \delta(x,y)dxdy}$$

Momento de Inércia

O momento de inércia para um referencial qualquer é definido por:

$$I_E = \iint_D r^2(x,y) \cdot \delta(x,y)dxdy$$

Ou, se calcularmos em relação aos eixos coordenados:

$$I_x = \iint_D y^2 \cdot \delta(x,y)dxdy$$
$$I_y = \iint_D x^2 \cdot \delta(x,y)dxdy$$

Podemos também calcular em relação a origem:

$$I_O = \iint_D \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \cdot \delta(x,y)dxdy = \iint_D (x^2+y^2) \cdot \delta(x,y)dxdy = I_x + I_y$$

Ex.1: Determine o centro de massa e o momento de inércia em relação ao eixo x, da região D limitada por $x = y^2$ e $x = y + 2$, sendo $\delta(x,y) = 3$.

Resolução:

$$y^2 = y + 2 \rightarrow \begin{cases} y = 2 \Rightarrow x = 4 \\ y = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Podemos então calcular o centro de massa e o momento de inércia:

$$M = \iint_D \delta(x,y)dxdy = \int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} 3dxdy = \frac{27}{2}$$
$$M_y = \iint_D x \cdot \delta(x,y)dxdy = \int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} 3xdxdy = \frac{108}{5}$$
$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{8}{5}$$

Analogamente para o y:

$\bar{y} = \frac{1}{2}$

O momento de inércia em relação a x:

$$I_x = \iint_D y^2 \cdot \delta(x,y)dxdy = \int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} 3x^2dxdy = \frac{189}{20}$$